

Løsningsforslag for 1. obligatoriske oppgave høsten 2011

Oppgave 1.

a)

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
S	S	U	S	U	S
S	U	U	S	U	S
U	S	S	S	S	S
U	U	S	U	U	S

Vi ser at $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ er en tautologi, dvs. er sant for alle kombinasjoner av p og q .

Vi kan også avgjøre dette på flg. måte: Den eneste måten utsagnet kan bli usant på er at høyre side (dvs. q) er usann og venstre side er sann. Men hvis q er usann, vil $p \vee q \equiv p$ og dermed $(p \vee q) \wedge \neg p \equiv p \wedge \neg p$ og det siste er alltid usant.

b)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	U	U	S	U	U	U
S	U	S	U	U	S	U	U
S	U	U	U	U	U	U	U
U	S	S	S	S	S	S	S
U	S	U	U	S	S	S	S
U	U	S	U	S	S	S	S
U	U	U	U	S	S	S	S

Vi ser at $p \rightarrow (q \wedge r)$ og $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ har de samme sannhetsverdiene og de to utsagnene er dermed ekvivalente.

Oppgave 2

p : Jeg vil gjøre alle øvingsoppgavene

q : Jeg kommer til å få A til eksamen

a) q bare hvis p blir: $q \rightarrow p$

b) q og p blir: $q \wedge p$

c) enten ikke q eller ikke p blir: $\neg q \vee \neg p$ eller eventuelt: $\neg q \oplus \neg p$

d) p er tilstrekkelig for q blir: $p \rightarrow q$

e) q til tross for ikke p blir: $q \wedge \neg p$

Oppgave 3

$P(x)$: x har en bærbar pc

$Q(x)$: x har en iPad

- a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ b) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ c) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ d) $\forall x(Q(x) \rightarrow P(x))$

Oppgave 4.

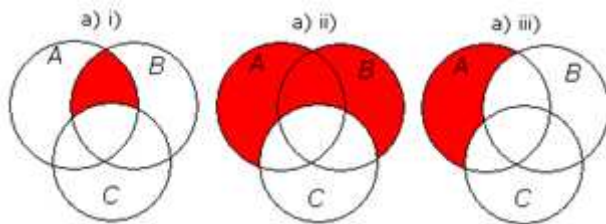
- a) Usant. Hvis for eksempel $m = 2$, så finnes ingen n slik at $n^2 = m$.
b) Usant. Hvis for eksempel $m = -1$ og $n = 1$, så er ikke $mn > n$.
c) Sant. Vi kan velge $m = n^2$
d) Usant. Hvis for eksempel $m = -100$, så finnes ingen n som oppfyller kravet.

Oppgave 5

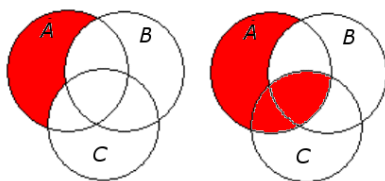
- a) Usant siden 4 ikke går opp i 5
b) Sant siden 2 går opp i 4
c) Usant. Bruk a) som moteksempel.
d) Sant. Tallet $m = 1$ går opp i alle tall n .
e) Sant. Alle tall m (forskjellig fra 0) går opp i $n = 0$.

Oppgave 6

a)

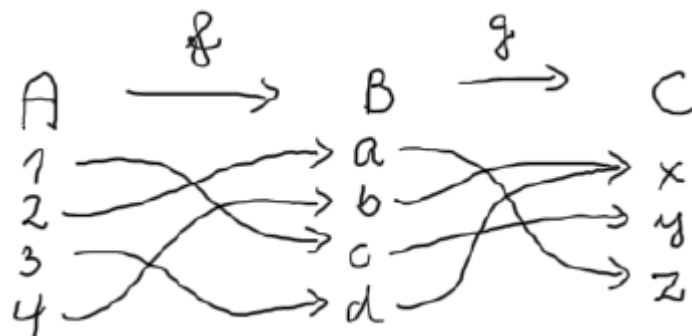


b)



Vi ser at $(A - B) - C$ til venstre er forskjellig fra $A - (B - C)$ til høyre!

Oppgave 7



Vi ser at f er en-til-en siden det ikke går mer enn én pil inn til noe element i B og f er på siden det går en pil til alle elementene i B. Funksjonen g er derimot ikke en-til-en siden det går to piler inn til elementet x . Men g er på siden det går en pil til alle elementene i C.

Vi får $h(1) = y$, $h(2) = z$, $h(3) = x$ og $h(4) = x$. Funksjonen h har ingen invers siden den ikke er en-til-en.

Oppgave 8

$$\begin{aligned} \text{i) } f(0) &= (0 \operatorname{div} 3) \bmod 7 = 0 \bmod 7 = 0 \\ f(40) &= (40 \operatorname{div} 3) \bmod 7 = 13 \bmod 7 = 6 \\ f(100) &= (100 \operatorname{div} 3) \bmod 7 = 33 \bmod 7 = 5 \end{aligned}$$

ii) Siden vi har mod 7 vil verdimengden maksimalt kunne bli $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Fra punkt i) har vi at 0, 5 og 6 er i verdimengden. Videre har vi at $f(3) = 1$, $f(6) = 2$, $f(9) = 3$ og $f(12) = 4$. Dermed blir verdimengden $V_f = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Da verdiorrådet er oppgitt til å være N , blir verdimengden og verdiorrådet forskjellige. Dermed er funksjonen ikke på. Den er ikke en-til-en siden for eksempel både $f(0)$ og $f(1)$ er 0.

Oppgave 9

a) Dette er en aritmetisk rekke. La a være første ledd, b siste ledd og d den faste differensen mellom et ledd og det foregående leddet. Da gjelder:

$$\text{Antall ledd } n = \frac{b-a}{d} + 1 \text{ og } \text{sum} = \frac{(a+b)n}{2}.$$

$$\text{Her blir } n = \frac{99-1}{2} + 1 = 49 + 1 = 50 \text{ og } \text{sum} = \frac{(1+99)50}{2} = \frac{100 \cdot 50}{2} = 2500$$

$$\text{b) } n = \frac{98-2}{4} + 1 = 24 + 1 = 25, \quad \text{sum} = \frac{(2+98)25}{2} = \frac{100 \cdot 25}{2} = 1250$$

$$\text{c) } \sum_{k=0}^{10} (-2)^k = \frac{(-2)^{11} - 1}{(-2) - 1} = \frac{-2048 - 1}{-2 - 1} = \frac{-2049}{-3} = 683$$

$$\text{d) } \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{64} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}$$