Diskret matematikk – høsten 2011 – 1. obligatoriske oppgave

Innleveringsfrist fredag 23. september kl. 15

Samarbeid er tillatt. En gruppe på opptil fem studenter kan levere en felles løsning. Navnene på de som står bak løsningen må stå øverst på første side.

Løsningen kan leveres i en forelesning eller i en øvingstime. Den kan også leveres til faglærer på kontor PS436 (det vil stå en eske ved siden av kontordøren). Du kan skrive med penn eller blyant. Skriv slik at det er godt lesbart. **Alle svarene skal begrunnes!**

Oppgave 1.

a) Er $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ en tautologi? Bruk sannhetsverditabell eller en annen måte.
b) Er $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ og $p \rightarrow (q \wedge r)$ er logisk ekvivalente? Bruk sannhetsverditabell.

Oppgave 2

La p og q være henholdsvis utsagnet "*Jeg vil gjøre alle øvingsoppgavene*" og utsagnet "*Jeg kommer til å få A til eksamen*". Skriv flg. utsagn ved hjelp av p, q og logiske operatorer:

a) Jeg kommer til å få A til eksamen bare hvis jeg gjør alle øvingsoppgavene.
b) Jeg kommer til å få A til eksamen og jeg vil gjøre alle øvingsoppgavene.
c) Jeg vil enten ikke komme til å få en A til eksamen eller jeg vil ikke gjøre alle øvingsoppgavene.
d) For å få A til eksamen er det tilstrekkelig å gjøre alle øvingsoppgavene.
e) Jeg fikk A til eksamen til tross for at jeg ikke gjorde alle øvingsoppgavene.

Oppgave 3.

La $P(x)$ og $Q(x)$ stå for henholdsvis "*x har en bærbar pc*" og "*x har en iPad*". Variabelen x står for en student i faget diskret matematikk. Skriv flg. utsagn ved hjelp av $P(x)$, $Q(x)$, kvantorer og logiske operatorer:

a) Det er en student som har både bærbar pc og en iPad.
b) Alle studenter har bærbar pc eller iPad.
c) Det finnes en student som har bærbar pc, men ikke iPad.
d) Hvis en student har en iPad, så har studenten også bærbar pc.

Oppgave 4.

La m og n være hele tall. Avgjør for hvert av flg. utsagn om det er sant eller usant.

a) $\forall m \exists n\, (n^2 = m)$ b) $\forall m \forall n\, (mn > n)$ c) $\forall n \exists m\, (n^2 = m)$ d) $\forall m \exists n\, (n^2 - m < 100)$

Oppgave 5.

La m og n være hele tall med $m > 0$ og la $P(m,n)$ stå for utsagnet "m går opp i n". Det at m går opp i n er det samme som at det finnes et heltall k slik at $n = k \cdot m$. Avgjør for hvert av flg. utsagn om det er sant eller usant. I hvert tilfelle skal du gi en begrunnelse for resultatet du har kommet frem til:

a) $P(4,5)$ b) $P(2,4)$ c) $\forall m \forall n P(m,n)$ d) $\exists m \forall n P(m,n)$ e) $\exists n \forall m P(m,n)$

Oppgave 6.

a) La A, B og C være vilkårlige mengder. Lag Venn-diagrammer og for hvert tilfelle skravér det som blir i) $(A \cap B) - C$, ii) $(A \cup B) - C$, iii) $(A - B) - C$

b) Avgjør om $(A - B) - C$ er det samme som $A - (B - C)$. Tegn Venn-diagram!

Oppgave 7.

La $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$, $B = \{ a , b , c , d \}$ og $C = \{ x , y , z \}$. La funksjonene $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være gitt ved $f(1) = c$, $f(2) = a$, $f(3) = d$, $f(4) = b$, $g(a) = z$, $g(b) = x$, $g(c) = y$ og $g(d) = x$. Er f en til en ? Er f på ? Er g en til en ? Er g på ? Finn sammensetningen $h = g \circ f$, dvs. finn $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$. Har h en invers?

Oppgave 8.

La N være de naturlige tallene, dvs. $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots \}$. La $f : N \to N$ være funksjonen definert ved $f(n) = (n \text{ div } 3) \bmod 7$.

i) Finn $f(n)$ for $n = 0$, 40 og 100 .
ii) Finn verdimengden V_f til f. Er f en til en ? Er f på ? Svarene skal begrunnes!

Oppgave 9.

a) Finn summen 1 + 3 + 5 + 7 . . . . + 97 + 99 ved å bruke formelen for summen av en aritmetisk rekke.

b) Finn summen 2 + 6 + 10 + 14 + ... + 90 + 94 + 98 ved å bruke formelen for summen av en aritmetisk rekke.

c) Finn summen 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 . . . . - 512 + 1024 ved å bruke formelen for summen av en geometrisk rekke.

d) Finn summen $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/32$ ved å bruke formelen for summen av en geometrisk rekke.