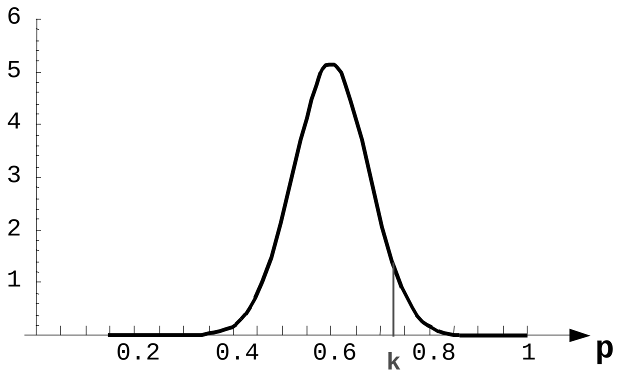
Oppgavene 17

Hypotese H_0: Ny medisin er ikke best.

Hypotese med 95 % konfidensintervall vil ha følgende testobservator for p når $p_0 = 0.6$

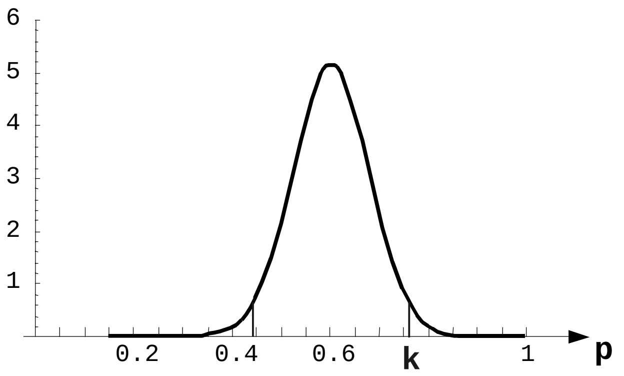
$$k = p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 0.727$$



Ensidig konfidensintervall med øvre grense

$z_\alpha = 1.645$ Hypotesen forkastes dersom måleresultatet viser at p > k.
Måleresultater viser at $p = 30/40 = 0.75$ Hypotesen forkastes.

NB! Fasiten er upresis. Verdiene for z_α som er oppført i fasit er verdiene for $z_{\alpha/2}$.
Hvis vi tar utgangspunkt i et tosidig intervall skal øverste verdi k være
$k = p_0 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = 0.752$ og da skal ikke hypotesen forkastes.



Tosidig konfidensintervall med øvre grense

Oppgave 18

Hypotesetesting: 0 –hypotesen H_0: Kjøttdeigen inneholder ikke mer enn 14 % fett.
Det som er viktig her er å finne en øvre kontrollgrense for kjøttdeigen. Velger derfor ensidig konfidensintervall. (Et tosidig intervall vil tillate litt større øvre grense, se foregående oppgave.)

En Z- test (innebærer at σ er oppgitt) med signifikansnivå $\alpha = 0.05$. Middelverdien av testresultatet må da ligge innenfor følgende konfidensgrenser for at hypotesen ikke skal forkastes.

$$\left[\infty \,,\, \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[\infty \,,\, 14 + 1.645 \cdot \frac{3}{\sqrt{9}}\right] = [\infty \,,\, 15,64]$$

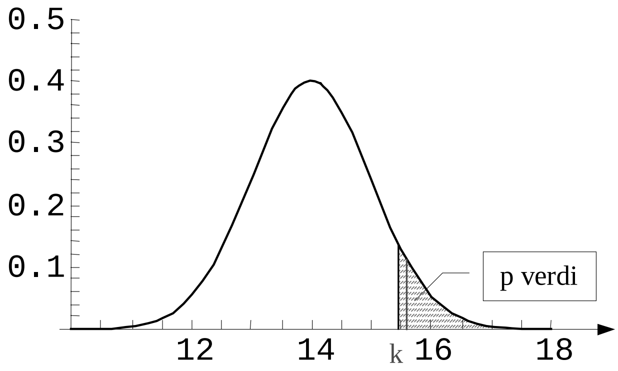
Målingene gir: $\bar{X} = \frac{139}{9} = 15,44$ Hypotesen kan ikke forkastes.

Testens p verdi er angitt ved det skraverte arealet på figuren til høyre, og beregnes på følgende måte.

$$p = 1 - G(z_{test}) \text{ der}$$

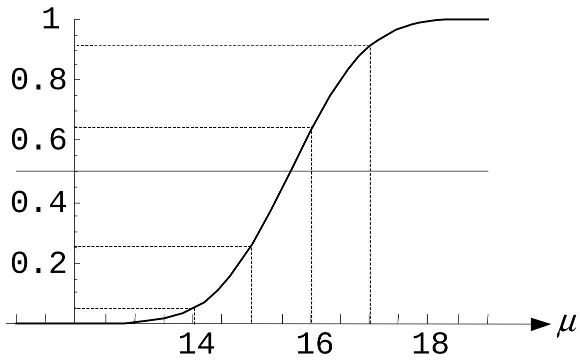
$$z_{test} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = 1,44$$

$$p = 1 - 0.925 = 0.075$$



Testens styrkefunksjon gir et mål for sannsynligheten til å forkaste hypotesen for forskjellige "virkelige" verdier av fettinnholdet μ.

Styrkefunksjonen for forskjellige verdier av μ, beregnes på følgende måte når vi tester mot en øvre grense.



$$\gamma(\mu) = 1 - G\left(z_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right)$$

For at feil av type II (for fet kjøttdeig oppdages ikke), når $\mu = 16$ ikke skal forekomme med større sannsynlighet enn 10% , setter vi opp følgende betingelse.

$$\gamma(16) = 0.90 = 1 - G\left(z_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right)$$

$$\Rightarrow G\left(z_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right) = 0.10$$

$$\Rightarrow z_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = -1,282$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2,927 \cdot \sigma}{\mu - \mu_0} = 4,39 \Rightarrow n \geq 20$$

Oppgave 20

Hypotesetesting: 0 –hypotesen H_0: Vernepliktige fra finmark er ikke lavere enn gjennomsnittet. $\mu_0 = 180\,cm$

Det som er viktig her er å finne en nedre kontrollgrense for høyden. Velger derfor ensidig konfidensintervall. (Et tosidig intervall vil tillate litt større øvre grense, se oppgave 17.)

En Z- test (innebærer at σ er oppgitt) med signifikansnivå $\alpha = 0.01$. Middelverdien av testresultatet må da ligge innenfor følgende konfidensgrenser for at hypotesen ikke skal forkastes.

$$\left[\ \mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \infty\right] = \left[\ 180 - 2{,}327 \cdot \frac{7}{\sqrt{528}},\ \infty\right] = [179.3\ ,\ \infty]$$

Målingene gir: $\bar{X} = 177.2$ Hypotesen forkastes. Dvs. det er grunnlag for å si at finnmarkingene er lavere en landsgjennomsnittet.

I fasiten har man valgt å se på testens Z verdi. Denne finnes på følgende måte:

$$Z_{test} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{177.2 - 180}{7 / \sqrt{528}} = -9.2$$

Når $Z_{test} < -z_\alpha$ forkastes hypotesen. Vi bruker $-z_\alpha$ fordi vi tester mot en nedre grense.

Hvis vi her skulle ha bestemt testens p-verdi, skulle vi ha satt opp $p = G\left(Z_{test}\right)$ siden vi tester mot en nedre grense.

Oppgave 21

Årlig forbruk av nitrogen i Norge antas normalfordelt med forventningsverdi μ og standardavvik σ. Data over forbruk i tonn i løpet av årene 1987-1996

109807	111208	110138	110418	110790
110875	109299	108287	110851	111976

Et 95 % konfidensintervall over forbruket vil ligge innenfor verdien:

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$ der $t_{\alpha/2}$ har 9 frihetsgrader siden n =10

Middelverdi	Standardavvik	Varians
110364,9	1043,65985	1089225,88

$$\left[110364{,}9 - 2{,}262 \cdot \frac{1043{,}7}{\sqrt{10}}, 110364{,}9 + 2{,}262 \cdot \frac{1043{,}7}{\sqrt{10}}\right]$$

$$\underline{\underline{= [109618\ ,\ 111111]}}$$

Det er ikke grunnlag for å hevde at nitrogenforbruket ligger over 110 000 tonn i året siden dette tallet ligger innenfor konfidensintervallet.

Oppgave 13

Fra oppgave 11 har vi $\hat{\mu}_X = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_1$ $= 30,5$ $\quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i^{\,2} - 6\overline{x}^2\right)}$ $= 1,05$

Et 95% konfidensintervall for variansen S^2 er χ-kvadratfordelt, med n-1 frihetsgrader.

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}\right]$$

$$= \left[\frac{5\cdot 1.1}{12.83}, \frac{5\cdot 1.1}{0.83}\right] = \underline{\underline{[0.430\ ,\ 6.64]}}$$

Konfidensintervallet for standardavviket blir:

$$\left[\sqrt{0.430}\ ,\ \sqrt{6.64}\right] = [0.655\ ,\ 2.577]$$